'21

前期日程

数　学　問　題

（理工学部　電子・機械類）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この『数学問題』を開いてはいけません。
2. この中には, 2 枚の下書用紙と, 問題文を含む 5 枚の解答用紙があります。
3. 試験開始後，直ちに, 二つ折りになっているすべての用紙を広げてください。
4. 問題に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所があった場合は申し出てください。
5. 氏名と受験番号は，すべての解答用紙の所定の欄に必ず記入してください。
6. 解答用紙の裏面は計算等の下書きに使用しても構いませんが，解答は各問題の下の解答欄に記入し，裏面は解答に使用しないでください。解答用紙の裏面に解答してもその部分は採点しません。
7. 5 枚の解答用紙のみを回収しますので，この表紙と 2 枚の下書用紙は持ち帰ってください。

下　書　用　紙　(1)

下　書　用　紙　(2)

数　　学

氏名	

受験番号	

1　円 $(x-2)^2+y^2=1$ と直線 $y=mx$ が異なる 2 点 P, Q で交わっているとき, 次の問いに答えよ。

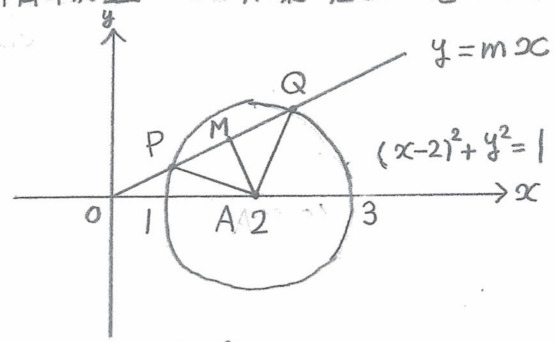
(1) m の値の範囲を求めよ。

(2) 円の中心を A とするとき, △APQ の面積を m で表せ。

(3) 線分 PQ の中点 M の座標を (p, q) とする。m の値が (1) の範囲で変化するとき, p と q の満たす方程式を p と q のみで表せ。

[解答欄]

情報1　物質環境1　電子機械1



(1) $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=1 \\ y=mx\end{cases} \rightarrow (x-2)^2+m^2x^2=1$

$\therefore (1+m^2)x^2-4x+3=0 \quad \cdots ①$

異なる2点で交わるので、判別式 $D>0$ なので

$D=16-12(1+m^2)>0$

$m^2<\frac{1}{3}$ より $\underline{-\frac{1}{\sqrt{3}}<m<\frac{1}{\sqrt{3}}}$

分母の有理化しなくてもOK

(2) ① より $x=\frac{2\pm\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2}$

したがって

点P $\left(\frac{2-\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2},\ m\frac{2-\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2}\right)$

点Q $\left(\frac{2+\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2},\ m\frac{2+\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2}\right)$

となるので

$PQ=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2}\right)^2+\left(m\frac{2\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2}\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{1-3m^2}\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$

$=2\sqrt{\frac{1-3m^2}{1+m^2}}$

点 A(2, 0) と直線 $mx-y=0$ の距離は

$\frac{|m\times 2-0|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{2|m|}{\sqrt{1+m^2}}$

したがって △APQ の面積は

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{1-3m^2}{1+m^2}}\times\frac{2|m|}{\sqrt{1+m^2}}$

$=\underline{\frac{2|m|\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2}}$

(3)

点Mの座標は

$\left(\frac{2}{1+m^2},\ \frac{2m}{1+m^2}\right)$ だから

$p=\frac{2}{1+m^2},\ q=\frac{2m}{1+m^2}$

m を消去すると

$\underline{p^2-2p+q^2=0}$

or

$\underline{(p-1)^2+q^2=1}$

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

2

M, A, E, B, A, S, H, I の 8 文字を使ってできる文字列について, 次の問いに答えよ。ただし, A と A の 2 文字は区別せず, また, 8 文字のうち母音は A, E, I である。

(1) 8 文字すべてを使ってできる文字列はいくつあるか。

(2) 8 文字すべてを使ってできる文字列のなかで, A が隣り合うものはいくつあるか。

(3) 8 文字すべてを使ってできる文字列のなかで, どの母音も隣り合わないものはいくつあるか。

[解答欄]

情報2　物質環境2　電子機械2

(1) すべて異なる8文字からなる文字列は 8!通り. しかし, AとAは区別しないので

$$\frac{8!}{2!} = \underline{20160}$$

(2) 2つのAを1つの文字Aとみなせば, すべて異なる7文字を使ってできる文字列を考えればよいので

$$7! = \underline{5040}$$

(3) 母音をV, 子音をCとかく. 8文字のうち, 母音も子音も4文字ずつなので 次の5つの場合を考えればよい.

① CVCVCVCV

② VCCVCVCV

③ VCVCCVCV

④ VCVCVCCV

⑤ VCVCVCVC

上の①について, Vの並べ方は $\frac{4!}{2!}$. ここでAとAは区別しないので 2!で割った.

他方 Cの並べ方は 4! なので

①は $\frac{4! \times 4!}{2!}$

②, ③, ④, ⑤のどれも全く同じなので

$$\frac{4! \times 4!}{2!} \times 5 = \underline{1440}$$

得点	

数　　　学

氏 名	

受 験 番 号	

3　k と l は $0<k<1,\ 0<l<1$ を満たす。△OAB は1辺の長さが1の正三角形とし, 辺 OA を $k:(1-k)$ に内分する点を C, 辺 OB を $l:(1-l)$ に内分する点を D とする。O を通り直線 CD に垂直な直線と, 直線 AB との交点を E とする。E が線分 AB を $(1+m):m$ に外分するとき, 次の問いに答えよ。ただし, $m>0$ である。

(1) $k>2l$ が成り立つことを示せ。

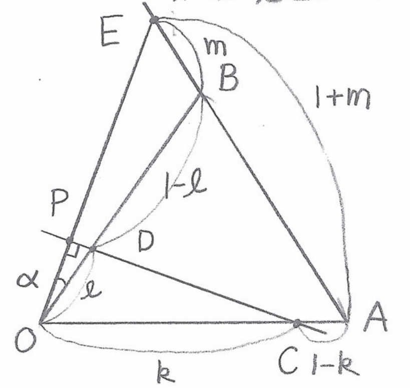
(2) m を k と l を用いて表せ。

(3) 直線 CD と直線 OE との交点を P とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を満たす s を k と l を用いて表せ。

(4) $k=3l$ のとき, 前問 (3) の s を l を用いて表せ。

[解答欄]

医③　物質環境③　電子機械③　情報③（情報③のみ(4)は除外）



(1) 直線CDと直線OEの交点をPとする. $\angle DOP=\alpha$ とおけば, $\angle ODC=\frac{\pi}{2}+\alpha$ なので $\angle OCD=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}-\alpha$.

$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{OP}{OC}=\frac{OP}{k}$

他方, 加法定理より

$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha$

$=\frac{1}{2}\frac{OP}{OD}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{DP}{OD}=\frac{OP-\sqrt{3}\,OP}{2l}$

$<\frac{OP}{2l}$　$\therefore \frac{OP}{k}<\frac{OP}{2l}$ なので

$k>2l$

(2) $\overrightarrow{OE}=\frac{-m\overrightarrow{OA}+(1+m)\overrightarrow{OB}}{1+m-m}=-m\overrightarrow{OA}+(1+m)\overrightarrow{OB}$

他方 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=l\,\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OA}$.

$\overrightarrow{OE}$ と $\overrightarrow{CD}$ は垂直なので

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ だから

$0=mk+(1+m)l-\{ml+(1+m)k\}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=mk+(1+m)l-\{ml+(1+m)k\}\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\{m(k+l)+2l-k\}$

$\therefore m=\frac{k-2l}{k+l}$

(3) $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OB}=-m\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+(1+m)|\overrightarrow{OB}|^2$

$=-\frac{m}{2}+1+m=\frac{m}{2}+1$ …①

他方, $s>0$ に注意して

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OB}=OE\times OB\cos\alpha$

$=OE\times\frac{OP}{OD}=OE\times\frac{OP}{l}=\frac{s}{l}OE^2$ …②

余弦定理より

$OE^2=OA^2+AE^2-2OA\times AE\cos\frac{\pi}{3}$

$=1+(1+m)^2-2(1+m)\frac{1}{2}=m^2+m+1$

これを②へ代入して

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{s}{l}(m^2+m+1)$ …③

①, ③より

$s=\frac{l\left(\frac{m}{2}+1\right)}{m^2+m+1}=\frac{kl(k+l)}{2(k^2-kl+l^2)}$

(4) $k=3l$ のとき

$s=\frac{3l^2\times 4l}{2l^2(9-3+1)}=\frac{6}{7}l$

情報③では(4)はありません(除外して下さい)。

得点	

数　学

氏名	

受験番号	

4 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について答えよ。n を正の整数とするとき,

$$a_1=1,\qquad b_1=\sqrt{2},\qquad a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\qquad b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}.$$

(1) 不等式 $b_m<a_m$ を満たす正の整数 m をすべて求めよ。

(2) $a_1, b_1, a_m, b_m, a_{m+1}, b_{m+1}$ の大小関係を不等号 $<$ を用いて表せ。ここで, m は2以上の整数である。

[解答欄]

$\boxed{医4}$ 情報$\boxed{4}$ 物質環境$\boxed{4}$ 電子機械$\boxed{4}$ (情報$\boxed{4}$,物質環境$\boxed{4}$,電子機械$\boxed{4}$では(3)は除外)

(1) $b_1=\sqrt2$, $a_1=1$ より $b_1<a_1$ は成立しないので, mは2以上.

$a_2-b_2=\frac{a_1+b_1}{2}-\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}=\frac{(a_1-b_1)^2}{2(a_1+b_1)}>0$

2以上の整数mに対して $a_m>b_m$ と仮定する.

$a_{m+1}-b_{m+1}=\frac{a_m+b_m}{2}-\frac{2a_mb_m}{a_m+b_m}$

$=\frac{(a_m-b_m)^2}{2(a_m+b_m)}>0$. ここで

すべての正の整数nについて $a_n>0$ かつ $b_n>0$ であることに注意.

したがって $b_m<a_m$ が成立するのは mが2以上の任意の整数のとき.

(2) nを1以上の整数とする.

$a_{n+1}b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\times\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$

$=a_nb_n$ なので

$a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n=\cdots=a_2b_2$

$=a_1b_1=\sqrt2$. だから $b_n=\frac{\sqrt2}{a_n}$ …①

さて $a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+b_n}{2}-a_n$

$=\frac{b_n-a_n}{2}$ なので

$a_2-a_1=\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{\sqrt2-1}{2}>0$.

他方 mを2以上の整数とするとき

(1)より

$a_{m+1}-a_m=\frac{b_m-a_m}{2}<0$

なので $a_{m+1}<a_m$ …② (mは2以上の整数)

①より $\frac{\sqrt2}{b_{m+1}}<\frac{\sqrt2}{b_m}$ なので

$b_m<b_{m+1}$ (mは2以上の整数) …③

(1), ②, ③ より

$b_m<b_{m+1}<a_{m+1}<a_m$ …④

ところで $b_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}=\frac{2\sqrt2}{1+\sqrt2}>1=a_1$ …⑤

なぜなら $\sqrt2>1$ より $2\sqrt2>1+\sqrt2$.

ゆえに $\frac{2\sqrt2}{1+\sqrt2}>1$ だから.

さらに ① より $a_2=\frac{\sqrt2}{b_2}=\sqrt2\,\frac{1+\sqrt2}{2\sqrt2}$

$=\frac{1+\sqrt2}{2}<\frac{\sqrt2+\sqrt2}{2}=\sqrt2=b_1$ …⑥

④, ⑤, ⑥ より

$a_1<b_m<b_{m+1}<a_{m+1}<a_m<b_1$

(3) $n=1$ のとき $|a_1-b_1|=\sqrt2-1$

$<\frac32-1=\frac12=2^{(1-2^1)}$ より成立.

$n=2$のとき $|a_2-b_2|=a_2-b_2$

$=\frac{1+\sqrt2}{2}-\frac{2\sqrt2}{1+\sqrt2}=\frac{5\sqrt2-7}{2}<2^{(1-2^2)}$

($\because 2<\left(\frac{29}{20}\right)^2$) 2以上の整数$n$

について $|a_n-b_n|<2^{(1-2^n)}$ を仮定.

$|a_{n+1}-b_{n+1}|=a_{n+1}-b_{n+1}$

$=\frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)}<\frac{(a_n-b_n)^2}{2(b_n+b_n)}$

$<\frac{(a_n-b_n)^2}{2\cdot2a_1}<\frac{(a_n-b_n)^2}{2}<\frac12\left(2^{(1-2^n)}\right)^2$

$=\frac12\,2^{(2-2^{n+1})}=2^{(1-2^{n+1})}$.

$n+1$のときも成立.

したがって すべての正の整数nに対して $|a_n-b_n|<2^{(1-2^n)}$ が成立.

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

5　a, b, c を実数の定数とするとき, すべての実数 x で定義された関数 $f(x)$ について, 次の問いに答えよ。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leqq 0), \\ x^3 + ax^2 + bx + c & (0 < x \leqq 1), \\ 0 & (x > 1). \end{cases}$$

(1) 関数 $f(x)$ がすべての x で連続であるための, a, b, c についての必要十分条件を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ がすべての x で微分可能であるための, a, b, c についての必要十分条件を求めよ。

(3) a, b, c が上の (2) で与えられた必要十分条件を満たすとき, 関数 $f(x)$ の $x=0$, $x=1$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

[解答欄]

情報 6　物質環境 6　電子機械 5

(1) $f(x)$ はすべての x で連続と仮定する. したがって $x=0$ でも $x=1$ でも連続である.

$x=0$ において: まず $f(0)=0$.

$x<0$ のときは $f(x)=x \xrightarrow[(x\to 0)]{} 0$

$0<x<1$ のときは $f(x)=x^3+ax^2+bx+c \xrightarrow[(x\to 0)]{} c$　ゆえに $c=0$ …①

$x=1$ において: まず $f(1)=a+b+c+1$

$=a+b+1$ ($\because c=0$)

$0<x<1$ のときは $f(x)=x^3+ax^2+bx$

$\to a+b+1$ $(x\to 1)$

$x>1$ のときは $f(x)=0 \xrightarrow{(x\to 1)} 0$.

ゆえに $a+b+1=0$ …②

逆に①と②が満たされれば $f(x)$ はすべての x で連続.

したがって $c=0$ かつ $a+b+1=0$

(2) $f(x)$ はすべての x で微分可能と仮定する. 当然, すべての x で連続だから, ①と②が成立.

$x=0$ でも $x=1$ でも微分可能である.

$x=0$ において:　$x<0$ のとき

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x-0}{x}=1 \xrightarrow{(x\to 0)} 1$

$0<x<1$ のとき

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x^3+ax^2+bx-0}{x}$

$=x^2+ax+b \to b$ $(x\to 0)$

$\therefore b=1$ …③　②より $a=-2$ …④　これより $f'(0)=1$

$x=1$ において: ①, ③, ④より

$0<x<1$ のとき

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{x^3-2x^2+x-0}{x-1}$

$=x^2-x \to 0$ $(x\to 1)$

$x>1$ のとき

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{0-0}{x-1}=0 \xrightarrow{(x\to 1)} 0$

また $f'(1)=0$

逆に ①, ③, ④ が満たされれば $f(x)$ はすべての x で微分可能.

したがって

$a=-2$ かつ $b=1$ かつ $c=0$

(3)　(2) より

$f'(0)=1$, $f'(1)=0$

得点	