医 1

数　　学

氏名	

受験番号	

1　$p,\ q$ を実数の定数とする。3次方程式 $x^3+px^2+qx+1=0$ が虚数解 α と $\dfrac{1}{\alpha}$ をもつとき，以下の問いに答えよ。

（1）$p=q$ が成り立つことを示せ。

（2）定数 p の値の範囲を求めよ。

（3）α の実部 s，虚部 t について $s+2t=-1$ が成り立つときの p の値を求めよ。

［解答欄］

(1) 題意より $\begin{cases} \alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+1=0 & \cdots\cdots ① \\ \alpha^{-3}+p\alpha^{-2}+q\alpha^{-1}+1=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②×α^3 より　$1+p\alpha+q\alpha^2+\alpha^3=0$

① との差をとり　$p(\alpha^2-\alpha)+q(\alpha-\alpha^2)=0$ —③

α は虚数であるので $\alpha^2-\alpha=\alpha(\alpha-1)\neq0$. したがって ③ より $p-q=0$

よって $p=q$.

(2) $p=q$ のとき，3次方程式は

$x^3+p(x^2+x)+1=(x+1)(x^2-x+1)+px(x+1)$

$=(x+1)(x^2+(p-1)x+1)=0$

これより虚数解は $x^2+(p-1)x+1=0$ — ④ の解であらねばならず，

虚数解をもつ $\Longleftrightarrow D=(p-1)^2-4=(p-3)(p+1)<0 \Longleftrightarrow -1<p<3$

④ の解を α,β とするとき，解と係数の関係より $\alpha\beta=1$.

よって虚数解は α と $\dfrac{1}{\alpha}$ となる.

(3) ④ の解は $\alpha=s+it$ とその共役な複素数 $\overline{\alpha}=s-it$ である．再び ④ の解と係数の関係より

$\alpha\overline{\alpha}=(s+it)(s-it)=s^2+t^2=1$ — ⑤

$s+2t=-1$ より $s=-(2t+1)$. ⑤ に代入し

$(2t+1)^2+t^2=5t^2+4t+1=1$　よって $5t^2+4t=t(5t+4)=0$

α は虚数解より $t\neq0$. ゆえに $t=\dfrac{-4}{5}$. このとき $s=-(2t+1)=\dfrac{3}{5}$.

④ の解と係数の関係より $\alpha+\overline{\alpha}=2s=\dfrac{6}{5}=-(p-1)$

よって $p=\dfrac{-1}{5}$.

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

2 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は次の条件によって定められている。

すべての自然数 n に対して a_n, b_n はともに整数で, $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}\,b_n$

このとき以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n について $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を, それぞれ求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

[解答欄]

(1) 数列 $\{a_n\}\{b_n\}$ の条件より

$a_{n+1}+\sqrt{2}\,b_{n+1} = (3+2\sqrt{2})^{n+1} = (3+2\sqrt{2})^n(3+2\sqrt{2})$

$= (a_n+\sqrt{2}\,b_n)(3+2\sqrt{2}) = 3a_n+4b_n+\sqrt{2}(2a_n+3b_n)$

ここで a_{n+1}, b_{n+1}, a_n, b_n は整数なので

$a_{n+1} = 3a_n+4b_n$, $b_{n+1} = 2a_n+3b_n$

したがって

$a_n^2-2b_n^2 = (3a_{n-1}+4b_{n-1})^2-2(2a_{n-1}+3b_{n-1})^2$

$= (9-8)a_{n-1}^2+(24-24)a_{n-1}b_{n-1}+(16-18)b_{n-1}^2$

$= a_{n-1}^2-2b_{n-1}^2 = \cdots = a_1^2-2b_1^2$

$3+2\sqrt{2} = a_1+\sqrt{2}\,b_1$ から $a_1=3$, $b_1=2$. よって $a_1^2-2b_1^2=1$

ゆえにすべての自然数 n について $a_n^2-2b_n^2=1$

(2) 再び $\{a_n\}\{b_n\}$ の条件式より $a_n = (3+2\sqrt{2})^n-\sqrt{2}\,b_n$.

(1)での $a_n^2-2b_n^2=1$ に代入すると,

$\{(3+2\sqrt{2})^n-\sqrt{2}\,b_n\}^2-2b_n^2=1$ すなわち $(3+2\sqrt{2})^{2n}-2\sqrt{2}(3+2\sqrt{2})^n b_n = 1$

ゆえに $b_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}(3+2\sqrt{2})^n}\{(3+2\sqrt{2})^{2n}-1\} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left\{(3+2\sqrt{2})^n-\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^n}\right\}$

また $a_n = (3+2\sqrt{2})^n-\sqrt{2}\,b_n = \dfrac{1}{2}\left\{(3+2\sqrt{2})^n+\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^n}\right\}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\,\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3+2\sqrt{2})^{-n}}{(3+2\sqrt{2})^n-(3+2\sqrt{2})^{-n}} = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+(3+2\sqrt{2})^{-2n}}{1-(3+2\sqrt{2})^{-2n}}$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3+2\sqrt{2})^{-2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^{2n}} = 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

3　四面体 OABC は次の 2 条件を満たすとする。

1．OA = OB = OC = 1

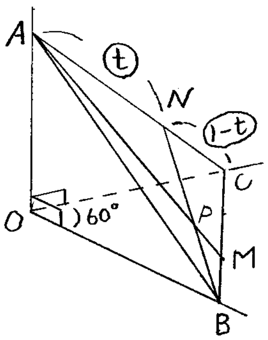
2．∠AOB = ∠AOC = 90°,　∠BOC = 60°

辺 BC を 1 : 2 に内分する点を M，辺 AC を $t:(1-t)$ に内分する点を N とおき，線分 AM と線分 BN との交点を P とおく。ただし，t は $0<t<1$ を満たす実数とする。以下の問いに答えよ。

（1）$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ および t を用いて表せ。

（2）線分 OP の長さを最小にする t の値を求めよ。

[解答欄]



(1) $AP:PM = s:1-s$, $BP:PN = u:1-u$

とおく．ただし s, u は $0<s<1$, $0<u<1$

を満たす実数とする．

このとき $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AM} = s\left(\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}\right)$ …①

他方 $\overrightarrow{AP} = (1-u)\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AN} = (1-u)\overrightarrow{AB} + ut\overrightarrow{AC}$ …②

①=② で $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は平行でないので

$\frac{2}{3}s = 1-u$, $\frac{1}{3}s = ut$．これらを解いて $u = \dfrac{1}{1+2t}$，$s = \dfrac{3t}{1+2t}$

ゆえに ① より $\overrightarrow{AP} = \dfrac{2t}{1+2t}\overrightarrow{AB} + \dfrac{t}{1+2t}\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく．このとき (1) をもちいて

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \frac{2t}{1+2t}(\vec{b}-\vec{a}) + \frac{t}{1+2t}(\vec{c}-\vec{a}) = \frac{1-t}{1+2t}\vec{a} + \frac{2t}{1+2t}\vec{b} + \frac{t}{1+2t}\vec{c}$$

四面体 OABC の条件より $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{1}{2}$

これらをもちい $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2}$ を計算すると

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\frac{(1-t)^2 + 4t^2 + t^2 + 2t^2}{(1+2t)^2}} = \sqrt{\frac{8t^2-2t+1}{(1+2t)^2}}$$

これが最小となるのは，$\sqrt{\ }$ の中 $\dfrac{8t^2-2t+1}{(1+2t)^2}$ $(= g(t)$ とおく$)$ が最小となるときである．

$$g'(t) = \frac{(16t-2)(1+2t)^2 - (8t^2-2t+1)\,4(1+2t)}{(1+2t)^4}$$

$$= \frac{(16t-2)(1+2t) - 4(8t^2-2t+1)}{(1+2t)^3} = \frac{20t-6}{(1+2t)^3}$$

$0<t<1$ での $g(t)$ の増減表

t	0		$\frac{3}{10}$		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		↘		↗	

ゆえに $t = \dfrac{3}{10}$ のとき OP の長さは最小となる．

得点	

数　学

氏 名	

受験番号	

4 aを正の定数，eを自然対数の底とし，$f(x)=\{x^2-(a+1)x+2a-1\}e^{-x}$とおく。以下の問いに答えよ。

（1）$x>0$のとき，不等式 $e^x>\dfrac{x^3}{6}$ が成り立つことを証明せよ。ただし，$x>0$のとき不等式 $e^x>x$ が成り立つことを用いてよいとする。

（2）関数$f(x)$が$x\geqq 0$において最小値をもつように，定数aの値の範囲を定めよ。

（3）$a=\dfrac{1}{2}$のとき，定積分 $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$ を求めよ。

［解答欄］

(1) $h(x)=e^x-\dfrac{x^3}{6}$ とおく．$h(x)>0\ (x>0)$ を示す．

$h(0)=1$, $h'(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$, $h'(0)=1$

$h''(x)=e^x-x$, $h''(0)=1$

$h''(x)>0\ (x>0)$ はもちいてよいので増減表は右のようになり 従って $h(x)>0\ (x>0)$

x	0	
$h''(x)$	1	$+$
$h'(x)$	1	$\nearrow$ よって$+$
$h(x)$	1	$\nearrow$

(2) まず $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ を示す．$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ は明らか．不等式 $e^x>\dfrac{x^3}{6}\ (x>0)$を用い，

$0<xe^{-x}=\dfrac{x}{e^x}<\dfrac{x}{\frac{x^3}{6}}=\dfrac{6}{x^2}\to 0\ (x\to+\infty)$, $0<x^2e^{-x}=\dfrac{x^2}{e^x}<\dfrac{x^2}{\frac{x^3}{6}}<\dfrac{6}{x}\to 0\ (x\to+\infty)$

より $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=0$ ゆえに $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

$f'(x)=\{2x-(a+1)\}e^{-x}-\{x^2-(a+1)x+2a-1\}e^{-x}=\{-x^2+(a+3)x-3a\}e^{-x}$

$=-(x-3)(x-a)e^{-x}$ そこでaの値により$f(x)$の増減を場合分けする．

① $0<a<3$ のとき

x	0		a		3	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ を考慮すると，$f(a)=(a-1)e^{-a}$ が $x\geqq 0$ での最小値となるためには．

$f(a)\leqq 0$ すなわち $a\leqq 1$

② $3<a$ のとき

x	0		3		a	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ より，$f(3)=(5-a)e^{-3}$が$x\geqq 0$での最小値となるためには．$f(3)\leqq 0$．すなわち $5\leqq a$

③ $a=3$ のとき

x	0		3	
$f'(x)$		$-$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$

$f(x)$の最小値はなし．

①②③ より $f(x)$ が $x\geqq 0$ において最小値をもつのは．$0<a\leqq 1$ または $5\leqq a$

(3) $a=\dfrac{1}{2}$ のとき $f(0)=0$，$f(1)=-\dfrac{1}{2}e^{-1}<0$．よって①の増減表から．$0\leqq x\leqq 1$ では $f(x)\leqq 0$

したがって $\displaystyle\int_0^1|f(x)|dx=-\int_0^1 f(x)\,dx=-\int_0^1\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)e^{-x}dx=\left[\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)e^{-x}\right]_0^1$

$\displaystyle-\int_0^1\left(2x-\frac{3}{2}\right)e^{-x}dx=-\frac{1}{2}e^{-1}+\left[\left(2x-\frac{3}{2}\right)e^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 2e^{-x}dx=-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{3}{2}+\left[2e^{-x}\right]_0^1$

$=2e^{-1}-\dfrac{1}{2}$.

得点	

医 5

数　　　学

氏名	

受験番号	

5　a，bは正の定数で$a>b$とする。座標平面上に楕円C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$と楕円$\mathrm{C}_2$：$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$がある。直線$\ell$は楕円$\mathrm{C}_1$，$\mathrm{C}_2$のどちらにも第1象限で接するものとする。直線$\ell$の方程式を$y=mx+n$とおく。以下の問いに答えよ。

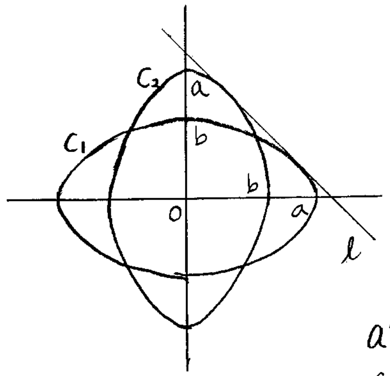
（1）mとnを求めよ。

（2）$a=\sqrt{3}$，$b=1$とする。楕円C_1と直線ℓとの接点のx座標をdとおく。このとき3つの領域

$$y \geqq \sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2},\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq d,\qquad y\leqq mx+n$$

の共通部分の面積を求めよ。

［解答欄］



(1) $C_1: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と $\ell: y=mx+n$ が接するので

yを消去してできる2次方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(mx+n)^2}{b^2}=1$ すなわち

$(b^2+a^2m^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$ ―①

は重解をもつ．判別式をゼロとおくことより

$a^4m^2n^2-(b^2+a^2m^2)a^2(n^2-b^2)=a^2b^2(b^2+a^2m^2-n^2)=0$

$a>0,\ b>0$ より $b^2+a^2m^2-n^2=0$ ―②

$C_2: \dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ と $y=mx+n$ が接するので，②でaとbを入れかえて $a^2+b^2m^2-n^2=0$ ―③

②③から $b^2-a^2+m^2(a^2-b^2)=0$．$a>b>0$ より $m^2=1$．$y=mx+n$ は第1象限にてC_1, C_2と接するので傾きmは負．ゆえに $m=-1$

②より $n^2=a^2+b^2$．ℓのy切片は正より $n=\sqrt{a^2+b^2}$

(2) $a=\sqrt{3}, b=1$ のとき $n=2$　このとき①は $4x^2-12x+9=(2x-3)^2=0$ よって $d=\dfrac{3}{2}$．

ゆえに求める面積は

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(-x+2-\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\right)dx=I_1-I_2,\quad I_1=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3}{2}}(-x+2)\,dx,\quad I_2=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx$$

ここで $I_1=\left[-\dfrac{x^2}{2}+2x\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3}{2}}=\dfrac{-9}{8}+3+\dfrac{3}{8}-\sqrt{3}=\dfrac{9}{4}-\sqrt{3}$

I_2については $x=\sqrt{3}\sin\theta$ とおくと，

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}\nearrow\frac{3}{2}$
θ	$\frac{\pi}{6}\nearrow\frac{\pi}{3}$

$dx=\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$ より

$I_2=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$．$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき $\cos\theta>0$ より $\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$

ゆえに $I_2=\sqrt{3}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos2\theta)\,d\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$．

よって求める面積は．$I_1-I_2=\dfrac{9}{4}-\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$

得点	